

# Die hochangeregten Zustände und $\beta$ -Übergänge einiger mittelleichter Kerne

Von R. p. SRIVASTAV \*

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforsch. 12 a, 679—693 [1957]; eingegangen am 28. Juni 1957)

Oszillator-Wellenfunktionen wurden benutzt, um die Bewegung der Nukleonen in einem HARTREE-Feld darzustellen. Starke Spinbahnkräfte, wie von MAYER<sup>1</sup>, JENSEN, HAXEL und SUESS<sup>5</sup> vorgeschlagen, wurden angenommen und mit Hilfe des Energievariationsverfahrens die negativen Paritäten der hochangeregten Spektren von  $O_{16}$ ,  $N_{16}$ ,  $F_{16}$  berechnet. Das Austauschwechselwirkungspotential wird als eine lineare Mischung des WIGNER-, BARTLETT-, HEISENBERG- und MAJORANA-Potentials angesetzt. Im Grunde genommen ist die Methode eine Erweiterung des SCHULTENSchen Modells<sup>22</sup> auf mittelleichte (3-schalige) Kerne. Mit Hilfe der exakten (3 Näherungen) aufgestellten Zustandsfunktionen, die für die Energieniveauberechnungen benutzt worden sind, wurden auch einige Fälle erlaubter  $\beta$ -Übergänge von  $O_{15}(\beta^+)N_{15}$ ,  $N_{16}(\beta^-)O_{16}$ ,  $F_{17}(\beta^+)O_{17}$ ,  $F_{18}(\beta^+)O_{18}$  berechnet. Die Ergebnisse haben eine allgemeine Übereinstimmung von ca. 10% mit experimentellen Werten.

Das Problem des Kernaufbaues wurde nach langerer Ruhepause 1948 von GOEPPERT-MAYER<sup>1</sup> unter Betonung der Schalenstruktur angegriffen, wobei sie den Nachdruck wieder auf das Einteilchenmodell verlegten (Anwendung der wohlbekannten Methode von HARTREE und FOCK: Annahme eines einheitlichen kugelsymmetrischen Potentials nach Art eines allen Teilchen gemeinsamen HARTREESchen „selfconsistent field“), indem sie die Bedeutung des J-J-Kopplungsschemas für die Aufspaltung der Energieniveaus klarstellten. Ungefähr gleichzeitig wurden andere Einzelteilchen-Niveauschemata von NORDHEIM<sup>2</sup>, MAYER<sup>3, 4</sup>, HAXEL, JENSEN und SUESS<sup>5</sup>, FEENBERG und HAMMACK<sup>6</sup> vorgeschlagen. FEENBERG<sup>7</sup> zeigte in einer Vergleichsstudie über diese Arbeiten den Erfolg des Modells von MAYER und JENSEN. Weitere von ROSENFIELD<sup>8, 9</sup> zusammengefaßte Beweismittel bezüglich der magnetischen Momente von  $H^3$  und  $He^3$  und andere Zahlen über die niedrigsten hochangeregten Zustände von  $Li^7$  und  $Be^7$  sprechen auch für die Existenz von Spinbahnkopplungsgliedern in der Wechselwirkungsenergie<sup>10</sup>, eine weitere Bestätigung des Standpunktes von MAYER und JENSEN. Vom experimentellen Standpunkt liegt ein großes Zahlenmaterial über die Bindungsenergie, die magnetischen, elektrischen Momente und den Gesamt-

drehimpuls (MACK<sup>11</sup>) vor, daneben wurden beachtliche experimentelle Kenntnisse über die hochangeregten Zustände leichter Kerne (HORNYAK, LAURITSEN, MORRISON und FOWLER<sup>12</sup>) von LAURITSEN und AJZENBERG<sup>13</sup> ausführlich untersucht worden (LAURITSEN BERG<sup>13</sup> erlangt. Ebenso sind  $\beta$ -Übergänge experi-

1.	$y_0^0 = e^{-1/2 ar^2}$
2.	$y_0^0 = (ar^2 - 3/2) e^{-1/2 ar^2}$
3.	$y_1^0 = \sqrt{a} e^{-1/2 ar^2}$
4.	$y_1^1 = \sqrt{a} (x + iy) e^{-1/2 ar^2}$
5.	$y_1^{-1} = \sqrt{a} (x - iy) e^{-1/2 ar^2}$
6.	$y_2^0 = (az^2 - 1/2) e^{-1/2 ar^2}$
7.	$y_2^1 = az(x + iy) e^{-1/2 ar^2}$
8.	$y_2^{-1} = az(x - iy) e^{-1/2 ar^2}$
9.	$y_2^2 = a(x + iy)^2 e^{-1/2 ar^2}$
10.	$y_2^{-2} = a(x - iy)^2 e^{-1/2 ar^2}$

Tab. 1. Definition der Funktionen  $y_l^m$ : ( $y_l^m = y_{ml} e^{-1/2 ar^2}$ ).

\* z. Z. in AB Atomenergi, Stockholm.

<sup>1</sup> M. GOEPPERT-MAYER, Phys. Rev. 74, 235 [1948].

<sup>2</sup> R. W. NORDHEIM, Phys. Rev. 75, 1894 [1949].

<sup>3</sup> M. G. MAYER, Phys. Rev. 75, 1969 [1949].

<sup>4</sup> M. G. MAYER, Phys. Rev. 78, 16 [1949].

<sup>5</sup> O. HAXEL, J. H. D. JENSEN u. H. E. SUESS, Z. Phys. 128, 295 [1950].

<sup>6</sup> E. FEENBERG u. K. C. HAMMACK, Phys. Rev. 75, 1877 [1949].

<sup>7</sup> E. FEENBERG, Phys. Rev. 77, 771 [1950].

<sup>8</sup> L. ROSENFIELD, Physica 17, 461 [1951].

<sup>9</sup> L. ROSENFIELD, J. Phys. Radium 5, 192 [1934].

<sup>10</sup> H. E. DUCKWORTH u. R. S. PRESTON, Phys. Rev. 82, 468 [1951].

<sup>11</sup> J. A. MACK, Rev. Mod. Phys. 22, 64 [1950].

<sup>12</sup> W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON u. W.A. FOWLER, Rev. Mod. Phys. 22, 291 [1950].

<sup>13</sup> F. AJZENBERG u. T. LAURITSEN, Rev. Mod. Phys. 24, 321 [1952].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Lfd. Nr.	Schalen-Struktur			Nukleone Wellen- Funktionen	Normali- sations- Konstanten	Drehimpulsoperatoren				Ladungsspin- operatoren		
	Nr. (Unter- schale)	$NL_J^{J_z} \tau$	$n \cdot f(\delta y_l^m) \tau$			$J$	$J_z$	$J^+$	$J^-$	$T^+$	$T^-$	$T_z$
					$\left[ n = \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/4} \right]$							
			Erste Schale		$x \cdot n$							
1	1	$0 \sigma_{1/2}^{1/2} \tau^+$	$1 n y_0^0 \delta^+ \tau^+$	$\sigma_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sigma_3$	0	$\sigma_2$	1
2	2	$0 \sigma_{1/2}^{1/2} \tau^-$	$1 n y_0^0 \delta^+ \tau^-$	$\sigma_2$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sigma_4$	$\sigma_1$	0	-1
3	3	$0 \sigma_{1/2}^{-1/2} \tau^+$	$1 n y_0^0 \delta^- \tau^+$	$\sigma_3$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sigma_1$	0	0	$\sigma_4$	1
4	4	$0 \sigma_{1/2}^{-1/2} \tau^-$	$1 n y_0^0 \delta^- \tau^-$	$\sigma_4$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sigma_2$	0	$\sigma_3$	0	-1
			Zweite Schale		$\left[ n = \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/4} \right]$							
			Unterschale 1 · $\pi$ -Gruppe		$x \cdot n$							
5	1	$1 \pi_{1/2}^{1/2} \tau^+$	$\sqrt{\frac{2}{3}} n (y_1^1 \delta^- + y_1^0 \delta^+) \tau^+$	$\pi_1$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\pi_3$	0	$\pi_2$	1
6	2	$1 \pi_{1/2}^{1/2} \tau^-$	$\sqrt{\frac{2}{3}} n (y_1^1 \delta^- + y_1^0 \delta^+) \tau^-$	$\pi_2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\pi_4$	$\pi_1$	0	-1
7	3	$1 \pi_{1/2}^{-1/2} \tau^+$	$\sqrt{\frac{2}{3}} n (y_1^{-1} \delta^+ - y_1^0 \delta^-) \tau^+$	$\pi_3$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\pi_1$	0	0	$\pi_4$	1
8	4	$1 \pi_{1/2}^{-1/2} \tau^-$	$\sqrt{\frac{2}{3}} n (y_1^{-1} \delta^+ - y_1^0 \delta^-) \tau^-$	$\pi_4$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\pi_2$	0	$\pi_3$	0	-1
			Unterschale 2 · P-Gruppe									
9	1	$1 P_{3/2}^{3/2} \tau^+$	$1 n (-y_1^1 \delta^+ \tau^+)$	$P_1$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\sqrt{3} P_3$	0	$P_2$	1
10	2	$1 P_{3/2}^{3/2} \tau^-$	$1 n (-y_1^1 \delta^+ \tau^-)$	$P_2$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\sqrt{3} P_4$	$P_1$	0	-1
11	3	$1 P_{3/2}^{1/2} \tau^+$	$\frac{1}{\sqrt{3}} n (2 y_1^0 \delta^+ - y_1^1 \delta^-) \tau^+$	$P_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} P_1$	$2 P_5$	0	$P_4$	1
12	4	$1 P_{3/2}^{1/2} \tau^-$	$\frac{1}{\sqrt{3}} n (2 y_1^0 \delta^+ - y_1^1 \delta^-) \tau^-$	$P_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} P_2$	$2 P_6$	$P_3$	0	-1
13	5	$1 P_{3/2}^{-1/2} \tau^+$	$\frac{1}{\sqrt{3}} n (2 y_1^0 \delta^- + y_1^{-1} \delta^+) \tau^+$	$P_5$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$2 P_3$	$\sqrt{3} P_7$	0	$P_6$	1
14	6	$1 P_{3/2}^{-1/2} \tau^-$	$\frac{1}{\sqrt{3}} n (2 y_1^0 \delta^- + y_1^{-1} \delta^+) \tau^-$	$P_6$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$2 P_4$	$\sqrt{3} P_8$	$P_5$	0	-1
15	7	$1 P_{3/2}^{-3/2} \tau^+$	$1 n (y_1^{-1} \delta^- \tau^+)$	$P_7$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\sqrt{3} P_5$	0	0	$P_8$	1
16	8	$1 P_{3/2}^{-3/2} \tau^-$	$1 n (y_1^{-1} \delta^- \tau^-)$	$P_8$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\sqrt{3} P_6$	0	$P_7$	0	-1
			Dritte Schale		$\left[ n = \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/4} x \right]$							
			Unterschale 1 · S-Gruppe									
17	1	$2 S_{1/2}^{1/2} \tau^+$	$\sqrt{\frac{2}{3}} n y_0^0 \delta^+ \tau^+$	$S_1$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$S_3$	0	$S_2$	1
18	2	$2 S_{1/2}^{1/2} \tau^-$	$\sqrt{\frac{2}{3}} n y_0^0 \delta^+ \tau^-$	$S_2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$S_4$	$S_1$	0	-1
19	3	$2 S_{1/2}^{-1/2} \tau^+$	$\sqrt{\frac{2}{3}} n y_0^0 \delta^- \tau^+$	$S_3$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$S_1$	0	0	$S_4$	1
20	4	$2 S_{1/2}^{-1/2} \tau^-$	$\sqrt{\frac{2}{3}} n y_0^0 \delta^- \tau^-$	$S_4$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$S_2$	0	$S_3$	0	-1

Tab. 2. Nukleare Wellenfunktionen und die Wirkung der Gesamtdrehimpulse und Ladungsspinoperatoren.

Fortsetzung von Tab. 2.

Lfd. Nr.	Schalen-Struktur			Nukleone Wellen- Funktionen	Normali- sations- Konstanten	Drehimpulsoperatoren				Ladungsspin- operatoren		
	Nr. (Unter- schale)	$NL_J^{J_z} \tau$	$n \cdot f(\delta y_l^m) \tau$			$J$	$J_z$	$J^+$	$J^-$	$T^+$	$T^-$	$T_z$
Unterschale 2 · $\delta$ -Gruppe												
21	1	$2 \delta_{3/2}^{3/2} \tau^+$	$\sqrt{\frac{2}{5}} n (y_2^2 \delta^- + y_2^1 \delta^+) \tau^+$	$\delta_1$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\sqrt{3} \delta_3$	0	$\delta_2$	1
22	2	$2 \delta_{3/2}^{3/2} \tau^-$	$\sqrt{\frac{2}{5}} n (y_2^2 \delta^- + y_2^1 \delta^+) \tau^-$	$\delta_2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\sqrt{3} \delta_4$	$\delta_1$	0	-1
23	3	$2 \delta_{3/2}^{1/2} \tau^+$	$\sqrt{\frac{2}{15}} n (y_2^0 \delta^+ - 3 y_2^1 \delta^-) \tau^+$	$\delta_3$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} \delta_1$	$2 \delta_5$	0	$\delta_4$	1
24	4	$2 \delta_{3/2}^{1/2} \tau^-$	$\sqrt{\frac{2}{15}} n (y_2^0 \delta^+ - 3 y_2^1 \delta^-) \tau^-$	$\delta_4$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} \delta_2$	$2 \delta_6$	$\delta_3$	0	-1
25	5	$2 \delta_{3/2}^{-1/2} \tau^+$	$\sqrt{\frac{2}{15}} n (-y_2^0 \delta^- - 3 y_2^{-1} \delta^+) \tau^+$	$\delta_5$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$2 \delta_3$	$\sqrt{3} \delta_7$	0	$\delta_6$	1
26	6	$2 \delta_{3/2}^{-1/2} \tau^-$	$\sqrt{\frac{2}{15}} n (-y_2^0 \delta^- - 3 y_2^{-1} \delta^+) \tau^-$	$\delta_6$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$2 \delta_4$	$\sqrt{3} \delta_8$	$\delta_5$	0	-1
27	7	$2 \delta_{3/2}^{-3/2} \tau^+$	$\sqrt{\frac{2}{5}} n (y_2^{-1} \delta^- - y_2^{-2} \delta^+) \tau^+$	$\delta_7$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\sqrt{3} \delta_5$	0	0	$\delta_8$	1
28	8	$2 \delta_{3/2}^{-3/2} \tau^-$	$\sqrt{\frac{2}{5}} n (y_2^{-1} \delta^- - y_2^{-2} \delta^+) \tau^-$	$\delta_8$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\sqrt{3} \delta_6$	0	$\delta_7$	0	-1
Unterschale 3 · D-Gruppe												
29	1	$2 D_{5/2}^{5/2} \tau^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}} n y_2^2 \delta^+ \tau^+$	$D_1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\sqrt{5} D_3$	0	$D_2$	1
30	2	$2 D_{5/2}^{5/2} \tau^-$	$\frac{1}{\sqrt{2}} n y_2^2 \delta^+ \tau^-$	$D_2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\sqrt{5} D_4$	$D_1$	0	-1
31	3	$2 D_{5/2}^{3/2} \tau^+$	$\frac{1}{\sqrt{10}} n (y_2^2 \delta^- - 4 y_2^1 \delta^+) \tau^+$	$D_3$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{5} D_1$	$2\sqrt{2} D_5$	0	$D_4$	1
32	4	$2 D_{5/2}^{3/2} \tau^-$	$\frac{1}{\sqrt{10}} n (y_2^2 \delta^- - 4 y_2^1 \delta^+) \tau^-$	$D_4$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{5} D_2$	$2\sqrt{2} D_6$	$D_3$	0	-1
33	5	$2 D_{5/2}^{1/2} \tau^+$	$\frac{1}{\sqrt{5}} n (-2 y_2^1 \delta^- - y_2^0 \delta^+) \tau^+$	$D_5$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{2} D_3$	$3 D_7$	0	$D_6$	1
34	6	$2 D_{5/2}^{1/2} \tau^-$	$\frac{1}{\sqrt{5}} n (-2 y_2^1 \delta^- - y_2^0 \delta^+) \tau^-$	$D_6$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{2} D_4$	$3 D_8$	$D_5$	0	-1
35	7	$2 D_{5/2}^{-1/2} \tau^+$	$\frac{1}{\sqrt{5}} n (2 y_2^{-1} \delta^+ - y_2^0 \delta^-) \tau^+$	$D_7$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$3 D_5$	$2\sqrt{2} D_9$	0	$D_8$	1
36	8	$2 D_{5/2}^{-1/2} \tau^-$	$\frac{1}{\sqrt{5}} n (2 y_2^{-1} \delta^+ - y_2^0 \delta^-) \tau^-$	$D_8$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$3 D_6$	$2\sqrt{2} D_{10}$	$D_7$	0	-1
37	9	$2 D_{5/2}^{-3/2} \tau^+$	$\frac{1}{\sqrt{10}} n (4 y_2^{-1} \delta^- + y_2^{-2} \delta^+) \tau^+$	$D_9$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$2\sqrt{2} D_7$	$\sqrt{5} D_{11}$	0	$D_{10}$	1
38	10	$2 D_{5/2}^{-3/2} \tau^-$	$\frac{1}{\sqrt{10}} n (4 y_2^{-1} \delta^- + y_2^{-2} \delta^+) \tau^-$	$D_{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$2\sqrt{2} D_8$	$\sqrt{5} D_{12}$	$D_9$	0	-1
39	11	$2 D_{5/2}^{-5/2} \tau^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}} n y_2^{-2} \delta^- \tau^+$	$D_{11}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\sqrt{5} D_9$	0	0	$D_{12}$	1
40	12	$2 D_{5/2}^{-5/2} \tau^-$	$\frac{1}{\sqrt{2}} n y_2^{-2} \delta^- \tau^-$	$D_{12}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\sqrt{5} D_{10}$	0	$D_{11}$	0	-1

Tab. 2. Nukleare Wellenfunktionen und die Wirkung der Gesamtdrehimpulse und Ladungsspinoperatoren.

und AJZENBERG<sup>13</sup>, ENDT und KLUYVER<sup>14</sup>, FEINGOLD<sup>15</sup>, die die meisten vorhandenen Daten über  $\log ft$ -Werte zusammengestellt haben und KING<sup>16</sup>, der die Energien katalogisiert hat). Andererseits fehlt noch eine übereinstimmende Theorie, die das enorme, in den letzten vier oder fünf Jahren gesammelte experimentelle Zahlenmaterial über Kerne erklären könnte.

Auch im Fall leichter Kerne, die experimentell am gründlichsten erforscht wurden, wurde außer einer Klassifikation der Zustände, der Konfiguration  $J^n$  durch FLOWERS<sup>17</sup> und der Untersuchung einiger spezieller Fälle von MAJORANA-Wechselwirkungsenergiematrizen durch MAYER<sup>18</sup>, KURATZ<sup>19</sup> und TALMI<sup>20</sup> kaum ein Versuch einer MAYER-JENSEN-Schematheorie gemacht. INGLIS<sup>21</sup> und SCHULTENS<sup>22</sup> Untersuchungen stellten die ersten Versuche für ein folgerichtiges Verständnis der leichten Kerne dar und liefern eine Erklärung der magnetischen und Quadrupolmomente. FERREL und SCHULTEN<sup>23</sup> erweiterten auf Basis der von SCHULTEN<sup>22</sup> benutzten Wellenfunktionen (die grundlegende Vorstellung dazu war das M-J-Kopplungsschema) die Arbeit auf die Berechnung einiger zulässiger  $\beta$ -Übergänge der Kerne in der 1. und 2. Schale. Trotz dieser anfänglichen Erfolge gab es jedoch keinen Versuch einer ausführlichen Anwendung des M-J-Schema\*-Modells auf mittelleichte Kerne (Glieder der 3. Schale). Dieses Problem wäre, speziell bei einer konsequenten theoretischen Analyse, nicht nur zur Beurteilung der Genauigkeit des Modells von Wichtigkeit, sondern überhaupt zur Erklärung der  $\beta$ -Übergänge. Wie bereits erwähnt, war der Kerngedanke dieses Modells die Anwendung des M-J-Kopplungsschemas auf Kernteilchen, die sich in einem symmetrischen HARTREE-Feld bewegen, wobei auf die sonst unabhängigen Teilchen eine Linearkombination der HEISENBERG<sup>24</sup>, WIGNER<sup>25</sup>, BARTLETT<sup>26</sup> und MAJORANA-Kraft<sup>27</sup> wirkt, und die natürlich einem erweiterten PAULI-Prinzip unterliegen (das auch den Ladungsspinvektor mit einbezieht). Soweit SCHULTENS Annahmen einen extremen Fall des M-J-Kopplungs-

schemas darstellen, ist zu erwarten, daß das Modell nur eine gute Annäherung des Grundniveaus sehr leichter Kerne darstellt, aber wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, ist die Anwendung auf die hochangeregten Zustände mittelleichter Kerne gleichermaßen erfolgreich, und zwar wurde besonderer Nachdruck auf Kerne, die der magischen Zahl 8 entsprechen, gelegt, d. h.  $O_{16}$ ,  $N_{16}$ ,  $F_{16}$ .

Es soll hier erwähnt werden, daß ein Versuch der Berechnung der Grundzustände und der niedrigen hochangeregten Zustände leichter Kerne von FEENBERG und WIGNER<sup>28</sup>, FEENBERG und PHILLIPS<sup>29</sup> und ROSE und BETHE<sup>30</sup> unter Zugrundelegung einer schwachen Spinbahnkopplung, von WHEELER<sup>31</sup>, HAFSTAD und TELLER<sup>32</sup> unter Zugrundelegung des Einteilchen-Modells gemacht wurde. Diese Versuche waren sehr wenig erfolgreich und, wie WEISSKOPF<sup>33</sup> ausführte, liegt das daran, daß man in solchen Fällen eine starke Spinbahnkopplung vom M-J-Typ anzunehmen hat. Es war also zu erwarten, daß SCHULTENS<sup>22</sup> Modell mindestens bessere Ergebnisse als die beiden obigen Theorien liefert.

Von einem gleich interessanten Problem, der Berechnung der  $\beta$ -Übergänge (erlaubten und übererlaubten), deren Behandlung in den früheren Theorien (FEENBERG, WIGNER, WHEELER usw.) fehlte, war zu erwarten, daß es die Genauigkeit des betrachteten Modells einigermaßen klären würde. Die Berechnungen von SCHULTEN und FERREL<sup>22</sup> hatten schon eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den experimentell gefundenen  $\log ft$ -Werten im Gebiet leichter Kerne (1. und 2. Schale) gezeigt. Eine ähnliche Probe wurde für die Wellenfunktionen der 3. Schale vorgeschlagen und als damit verbundenes Problem die Berechnung des Haupt- $\beta$ -Überganges (75%) vom  $N_{16}$ -Grundzustand zum hochangeregten Zustand  $3^-$  von  $O_{16}$ . Dieser spezielle Übergang mit einem  $\log ft$ -Wert von ca. 4,5 – gerade an der Grenze des ersten verbotenen Überganges – bildet eine recht strenge Bedingung zur Beurteilung der Genauigkeit des Modells.

<sup>14</sup> R. M. ENDT u. J. C. KLUYVER, Rev. Mod. Phys. **26**, 95 [1954].

<sup>15</sup> A. M. FEINGOLD, Rev. Mod. Phys. **23**, 10 [1951].

<sup>16</sup> R. W. KING, Rev. Mod. Phys. **26**, 327 [1954].

<sup>17</sup> B. M. FLOWERS, Proc. Roy. Soc., Lond. A **212**, 248 [1952].

<sup>18</sup> M. G. MAYER, Phys. Rev. **78**, 22 [1950].

<sup>19</sup> D. KURATZ, Phys. Rev. **80**, 98 [1950].

<sup>20</sup> I. TALMI, Phys. Rev. **82**, 101 [1951].

<sup>21</sup> D. R. INGLIS, Rev. Mod. Phys. **25**, 390 [1953].

<sup>22</sup> R. SCHULTEN, Z. Naturforsch. **8a**, 759 [1953].

<sup>23</sup> R. SCHULTEN u. R. A. FERREL, Phys. Rev. **94**, 739 [1954].

\* M-J = MAYER-JENSEN.

<sup>24</sup> W. HEISENBERG, Z. Phys. **77**, 1 [1932].

<sup>25</sup> E. P. WIGNER, Phys. Rev. **43**, 252 [1933]; Z. Phys. **83**, 253 [1933].

<sup>26</sup> J. H. BARTLETT, Phys. Rev. **49**, 102 [1936].

<sup>27</sup> E. MAJORANA, Z. Phys. **82**, 137 [1933].

<sup>28</sup> E. FEENBERG u. E. WIGNER, Phys. Rev. **51**, 95 [1937].

<sup>29</sup> E. FEENBERG u. PHILLIPS, Phys. Rev. **51**, 600 [1937].

<sup>30</sup> M. E. ROSE u. H. A. BETHE, Phys. Rev. **51**, 205 [1937].

<sup>31</sup> J. A. WHEELER, Phys. Rev. **52**, 108 [1937].

<sup>32</sup> L. R. HAFSTAD u. E. TELLER, Phys. Rev. **54**, 681 [1938].

<sup>33</sup> V. E. WEISSKOPF, Helv. Phys. Acta **23**, 187 [1950].

## I. Die Kernteilchen-Wellenfunktionen

Die nuklearen Wellenfunktionen werden nach der üblichen Methode aufgestellt. Die nichtrelativistische SCHRÖDINGER-Gleichung für die Bewegung des Kernteilchens in einem Oszillator-Potentialtopf wird unter Berücksichtigung der Spinbahnennergie

$$E_{SB} = -\frac{k}{2} \frac{\hbar^2}{(Mc)^2} M \omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \cdot(+l) \\ \cdot[-l(l+1)] \end{array} \right\} \quad (1)$$

für  $J = \begin{cases} l+\frac{1}{2} \\ l-\frac{1}{2} \end{cases}$

und der Spin- und Ladungsspinvektoren

$$\delta^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für den Spin } s = +\frac{1}{2}, \quad (2)$$

$$\delta^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für den Spin } s = -\frac{1}{2}, \quad (3)$$

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für ein Proton,} \quad (3)$$

$$\tau^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für ein Neutron}$$

gelöst.

## II. Das erweiterte Pauli-Prinzip und die Slatersche Determinantenfunktion

Zur Bildung der Kernzustandsfunktion aus den aufgestellten Wellenfunktionen ist zu berücksichtigen, daß das PAULI-Prinzip nun auch auf den Ladungsspin  $\tau$  auszudehnen ist. Die Funktionen müssen die Forderung der Antisymmetrie erfüllen. Eine notwendige Bedingung, die eine solche Gruppe von Kernteilchen erfüllen muß, ist die, daß sie der FERMI-Statistik<sup>34</sup> unterliegt. Wie bekannt, sind beide Eigenschaften erfüllt, wenn die Kombination der individuellen Kernteilchenfunktionen in der Form der SLATER<sup>35</sup>-Determinante gebildet wird. Die FERMI-antisymmetrische SLATERSche Determinantenfunktion für den O<sub>16</sub>-Kern ist also:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{16!}} \begin{vmatrix} \sigma_1(1) \dots \sigma_4(1), \pi_1(1) \dots \pi_4(1), P_1(1) \dots P_8(1) \\ \sigma_1(2) & \dots & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \sigma_1(16) & \dots & & P_8(16) \end{vmatrix} \quad (4)$$

Hier stellen die Zahlen (1), ..., (q), ..., (n) die Gesamtheit aller Koordinaten, d. h. Raumkoordinaten, Spin, Ladungsspin je eines Teilchens dar. Kurz

wird die folgende Bezeichnungsweise<sup>36</sup> verwendet werden:

$$\Phi = \{\sigma_1 \dots \sigma_4, \pi_1 \dots \pi_4, P_1 \dots P_8\}. \quad (5)$$

Speziell ist z. B.

$$\{1P, D_1\} = \{\sigma_1 \dots \sigma_4, \pi_1 \dots \pi_4, P_2 \dots P_8, D_1\} \quad (6)$$

(ein numerischer Index links des Schalensymbols wird zur Darstellung der Abwesenheit des betreffenden Teilchens verwendet, während völlig besetzte Schalen der Kürze halber weggelassen, jedoch als vorhanden behandelt werden. Eine Determinantenfunktion wird im allgemeinen mit dem Symbol  $\Delta$  bezeichnet werden).

Im weiteren wird von den Erhaltungssätzen für Gesamtdrehimpuls und Ladungsspin Gebrauch gemacht.

Es sei die Zustandsfunktion:

$$\Psi_{J_z=J} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta_{i, J_z=J}. \quad (7)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_i$  werden durch Anwendung des Verschiebungsoperators  $J^+$  bestimmt, denn

$$J^+ \Psi_{J_z=J} = 0$$

(da der Vektor  $J_z$  schon seinen maximalen Wert hat). Daher ist

$$J^+ \Psi_{J_z=J} = \sum_{j=1}^m J^+(j) \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta_{i, J_z=J} = 0. \quad (8)$$

Die  $\Delta_i$  sind  $m$ -spaltige Determinanten, die je  $m$  Teilchen darstellen. Im allgemeinen ist aber

$$\sum_{j=1}^m J^+(j) \Delta_i^{J_z}(1 \dots m) = \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \Delta_i^{J_z+1}(1 \dots m). \quad (9)$$

Daher lautet jetzt Gl. (8)

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_{ij} \Delta_i^{J_z+1}(1 \dots m) = 0. \quad (10)$$

Die Koeffizienten  $\beta_{ij}$  und die neuen Determinantenfunktionen ersieht man aus der Funktionentabelle (Tab. 2). Zur Bestimmung der Koeffizienten ist das nun ein System von  $m-n$  Gln. (10). Die übrigen

<sup>36</sup> Die einzelnen Unterschalen werden durch folgende Symbole dargestellt:

$\sigma$ :	$n=0, L=0, S=\pm\frac{1}{2},$
$\pi$ :	$n=1, L=1, S=-\frac{1}{2},$
$P$ :	$n=1, L=1, S=+\frac{1}{2},$
$S$ :	$n=2, L=0, S=\pm\frac{1}{2},$
$\delta$ :	$n=2, L=2, S=-\frac{1}{2},$
$D$ :	$n=2, L=2, S=+\frac{1}{2}.$

<sup>34</sup> E. FERMI, Z. Phys. 88, 161 [1934].

<sup>35</sup> J. C. SLATER, Phys. Rev. 34, 1293 [1929].

Koeffizienten erhält man aus einer ebensolchen Anwendung des Operators  $T^+$  (da für den Ladungsspin ebenfalls ein Erhaltungssatz gilt) und der Normierungsgleichung

$$\sum a_i^2 = 1. \quad (11)$$

Die Näherungs-Determinantenfunktion ist dann bezüglich ihrer aufbauenden Determinanten für eine spezielle Näherung völlig bestimmt.

### III. Zustandsfunktionen und das Energievariationsverfahren

Es wird nun angenommen, daß der Zustand eines Kerns nur bezüglich seines Drehimpulses, seiner Parität und seines Ladungsspins festgelegt ist und im allgemeinsten Fall durch eine lineare Kombination von Näherungsfunktionen  $\Psi_i$  (im oben besprochenen Sinn) dargestellt werden kann. Also ist

$$\Phi = \sum a_i \Psi_i. \quad (12)$$

(Der Index  $i$  bezieht sich auf die verschiedenen Näherungsordnungen.) Hier ist jedes  $\Psi_i$  normiert, gehört zu einer bestimmten Energieklasse und besteht selbst aus Determinantenfunktionen  $\Lambda$ , deren Koeffizienten durch Berücksichtigung der Erhaltungssätze von Gesamtdrehimpuls und Ladungsspin gewonnen wurden. Das Problem, das durch den Energieextremumsatz angegriffen werden soll, besteht also darin, die Koeffizienten  $a_i$ , die die Zustandsfunktion  $\Phi$  des Kerns festlegen, zu bestimmen.

Das Prinzip der minimalen Energie verlangt, daß der Erwartungswert  $\langle E_t \rangle$  der Gesamtenergie

$$E_t = \langle \Phi^* | E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} | \Phi \rangle$$

ein Minimum sein soll.

Es ist aber

$$\begin{aligned} E_t &= \sum_{i=0}^n a_i a_i \langle \Psi_i^* | E_k(i) | \Psi_i \rangle \\ &+ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \langle \Psi_i^* | E_p(ij) | \Psi_j \rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

wobei die  $E_k(i)$  die Operatoren der kinetischen Energie der Teilchen sind und  $E_p(ij)$  der Zweiteilchen-Operator der potentiellen Energie ist. Da die kinetische Energie für alle  $\psi_i$  gleich ist und außerdem die Funktion  $\Phi$  normiert sein muß, d. h.  $\sum a_i^2 = 1$ , kann der Ausdruck  $\langle E_k \rangle$  als eine Konstante, etwa  $E_k$  angesehen werden. Dann ist

$$\begin{aligned} E &= E_t - E_k = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \langle \Psi_i^* | E_p(ij) | \Psi_j \rangle \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (14)$$

Mit Hilfe des LAGRANGESchen Multiplikators  $\Lambda$  wird die Normierungsbedingung in die Gleichung eingeführt:

$$E = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \varepsilon_{ij} - \Lambda \left[ \sum_{i=0}^n a_i^2 - 1 \right]. \quad (15)$$

Um die Energie zu einem Minimum zu machen, ist Gl. (15) nach den  $a_i$  zu differenzieren und gleich Null zu setzen. Man erhält  $n$  Gleichungen in den  $a_i$ , die  $\Lambda$  enthalten (das sog.  $n$ -dimensionale Eigenwertproblem).

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_l} &= \frac{\partial}{\partial a_l} \left[ \sum_{i=0}^n a_i^2 \varepsilon_{ii} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \varepsilon_{ij} - \Lambda \{a_l^2 - 1\} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{oder} \quad 2 a_l \varepsilon_{ll} - 2 a_l \Lambda + 2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^n a_j \varepsilon_{lj} = 0 \quad (17)$$

$$\text{oder} \quad a_l (\varepsilon_{ll} - \Lambda) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^n a_j \varepsilon_{lj} = 0. \quad (18)$$

Die Gln. (18) sind genau  $n$  Gleichungen in den  $a_i$ , die  $n$ , den verschiedenen Ordnungen der Näherungsfunktionen  $\Psi_i$  entsprechende Werte des LAGRANGE-Parameters  $\Lambda$  liefern. Die  $n$  verschiedenen Werte von  $\Lambda$  erhält man unmittelbar, wenn man beachtet, daß die Gln. (18) nur dann lösbar sind, wenn ihre Säkulardeterminante verschwindet, d. h.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{00} - \Lambda & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \dots & \varepsilon_{0n} \\ \varepsilon_{10} & \varepsilon_{11} - \Lambda & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varepsilon_{1n} & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_{nn} - \Lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Hier gilt offenbar für die nicht diagonalen Glieder  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , da die Wechselwirkungsenergien hermitesch sind. Die Werte von  $\varepsilon_{ij}$  legen einerseits die Energieniveaus der verschiedenen Ordnungen fest und bestimmen andererseits die Werte der Näherungskoeffizienten  $a_i$  und folglich die Zustandsfunktion  $\Phi$ .

#### IV. Energieoperatoren

Zur Berechnung der hohen Anregungsenergien müssen weitere Annahmen über die Natur der zwischen den den Kern bildenden Teilchen herrschenden Wechselwirkungen getroffen werden. Die erste ist, wie schon zu Anfang erwähnt, die Linearität der Kernkraftfunktionen in den einzelnen WIGNER-, HEISENBERG-, MAJORANA- und BARTLETT-Komponenten. Die Methode wurde zuvor von SCHULTEN<sup>22</sup> mit Erfolg angewendet. Die Tensorwechselwirkung, die im Verhältnis zu diesen Komponenten recht wenig beiträgt, führt nur zur Erhöhung der Schwierigkeiten des Problems und wird daher vernachlässigt.

##### Die Wechselwirkungsenergien

Das gesamte Austauschwechselwirkungspotential wird als lineare Kombination der WIGNER<sup>25</sup>-, HEISENBERG<sup>24</sup>-, BARTLETT<sup>26</sup>- und MAJORANA-Potentials<sup>27</sup> angesetzt.

$$V_a = \gamma_W V_W + \gamma_H V_H + \gamma_B V_B + \gamma_M V_M. \quad (20)$$

Die Symbole haben hier die folgende Bedeutung:

$$V_W = -V_0 e^{-\beta r_{12}^2}, \quad (21)$$

kein Austausch,

$$V_H = -V_0 e^{-\beta r_{12}^2} [-P_\tau(1, 2)], \quad (22)$$

Ladungsaustausch,

$$V_B = -V_0 e^{-\beta r_{12}^2} [P_\sigma(1, 2)], \quad (23)$$

Spinaustausch,

$$V_M = -V_0 e^{-\beta r_{12}^2} [-P_\tau(1, 2)] [P_\sigma(1, 2)], \quad (24)$$

Ladungs- und Spinaustausch;

$V_0$  = maximale Tiefe des Potentialtopfes<sup>22</sup> = 35 MeV,  $\gamma_W$ ,  $\gamma_H$ ,  $\gamma_B$ ,  $\gamma_M$  sind die verschiedenen Koeffizienten für die Austauschkräfte,  $e^{-\beta r_{12}^2}$  = Radialkomponente des Potentials im Potentialtopf;

$$P_\tau = \frac{1}{2} (1 + \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2), \quad (25)$$

$$P_\sigma = \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2), \quad (26)$$

$1/\sqrt{\beta}$  = Reichweite der Kernkräfte.

Dazu kommt das Spinbahn-Wechselwirkungspotential  $V_{SB}$

$$V_{SB} = \gamma_{SB} \frac{V_0}{2 \hbar \beta} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot [\text{grad}_1 J(r_{12}) \times \vec{p}_1 + \text{grad}_2 J(r_{21}) \times \vec{p}_2]. \quad (27)$$

##### Der Spinbahnoperator $V_{SB}$

Vom Standpunkt der MAYER-JENSENSchen Theorie wirkt zwischen je zwei Teilchen auf Grund der

Kopplung von  $l$  und  $s$  eine weitere Kraft. Nach GAUSS<sup>37</sup> kann sie in der folgenden einfachen Form ausgedrückt werden:

$$V_{SB} = \gamma_{SB} \frac{V_0}{2 \hbar \beta} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot [\text{grad}_1 J(r_{12}) \times \vec{p}_1 + \text{grad}_2 J(r_{21}) \times \vec{p}_2]. \quad (28)$$

Hierbei treten neben Ausdrücken  $s_i l_i$  (eigentliche Spinbahnekopplung) Glieder mit  $s_i l_k$  auf, die eine Kopplung des Bahndrehimpulses eines Kernteilchens mit dem Spin eines anderen darstellen und vernachlässigt werden können. Dann wird Gl. (28) zu

$$V_{SB} = \gamma_{SB} \frac{V_0}{2 \hbar \beta} \cdot [\vec{\sigma}_1 (\text{grad}_1 J(r_{12}) \times \vec{p}_1) + \vec{\sigma}_2 (\text{grad}_2 J(r_{21}) \times \vec{p}_2)]. \quad (29)$$

Da die Ortsfunktionen  $J(r_{12})$  bis heute nicht genau bekannt sind, soll angenommen werden, daß sie sich ebenso wie die in den Austauschkräften auftretenden Ortsfunktionen verhalten und auch die Reichweite die gleiche ist. Mit diesen Annahmen lautet nun Gl. (29) :

$$\begin{aligned} V_{SB} &= \gamma_{SB} \frac{V_0}{2 \hbar \beta} [\vec{\sigma}_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{p}_1 \\ &\quad + \vec{\sigma}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{p}_2] (-\beta e^{-\beta r_{12}^2}) \\ &= -\gamma_{SB} \frac{V_0}{\hbar} e^{-\beta r_{12}^2} [\vec{\sigma}_1 \vec{l}_1 + \vec{\sigma}_2 \vec{l}_2] \\ &\quad - \gamma_{SB} \frac{V_0}{\hbar} e^{-\beta r_{12}^2} [\vec{\sigma}_1 \vec{r}_2 \times \vec{p}_1 + \vec{\sigma}_2 \vec{r}_1 \times \vec{p}_2] \\ &= -\gamma_{SB} \frac{V_W}{\hbar} [\vec{\sigma}_1 \vec{l}_1 + \vec{\sigma}_2 \vec{l}_2] \\ &\quad - \gamma_{SB} \frac{V_W}{\hbar} [\vec{\sigma}_1 \vec{r}_2 \times \vec{p}_1 + \vec{\sigma}_2 \vec{r}_1 \times \vec{p}_2], \end{aligned} \quad (30)$$

wobei die Operatoren  $\vec{\sigma} \vec{l}$  die folgenden Eigenwerte haben:

$$\sigma l = \frac{2 l s}{\hbar} = \hbar [J(J+1) - l(l+1) - s(s+1)] \equiv \hbar k. \quad (31)$$

Die  $k$  sind Konstanten und haben die folgenden Werte für die einzelnen Unterschalen:

$$k_\sigma = 0, \quad k_\pi = -2, \quad k_p = +1, \quad k_D = +2.$$

Der zweite Ausdruck in Gl. (30) zerfällt wiederum in zwei Teile, so daß

$$\begin{aligned} V_{SB} &= \gamma_{SB} V_W [k_1 + k_2] - \gamma_{SB} V_W [k_1 W_1^2 + k_2 W_2^1] \\ &\quad + (\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2) (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \gamma_{SB} V_W \\ &= V_1 - V_2 + V_3. \end{aligned} \quad (32)$$

<sup>37</sup> H. GAUSS, Z. Naturforschg. 7a, 44 [1952].

Dabei sind die  $W_i^j$  neue Operatoren, die nur den Winkelanteil der Kernteilchen-Wellenfunktionen betreffen. Sie ändern dessen Koordinaten, wenn er linear ist, und die Koordinaten eines Faktors, wenn er quadratisch ist. Zum Beispiel:

$$W_2^1(x_2 + iy_2) = (x_1 + iy_1), \quad (33)$$

$$W_2^1(x_2 + iy_2)^2 = (x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1). \quad (34)$$

Das letzte Glied des Ausdrucks für  $V_{SB}$  wird dadurch bestimmt, daß man beachtet, daß der Operator ein HERMITESCHER ist. Er verschwindet für alle Diagonalelemente.

Für die Koeffizienten  $\gamma$  wurden nach SCHULTEN<sup>22</sup> die folgenden Werte eingesetzt:

$$\gamma_W = \gamma_M = 0.35, \quad \gamma_B = \gamma_H = 0.15. \quad (35)$$

Für  $\gamma_{SB}$  ergibt sich aus der Energiedifferenz<sup>13</sup> zwischen den Helium-Zuständen  $\{P_2\}$  und  $\{\pi_2\}$

$$\gamma_{SB} = 0.04. \quad (36)$$

Unter diesen Umständen wird der Ausdruck für den Operator der gesamten potentiellen Energie:

$$V_P = \gamma_W V_W + \gamma_H V_H + \gamma_B V_B + \gamma_M V_M + V_{SB} + V_c \quad (37)$$

( $V_c$  = COULOMBSCHES Potential).

Der Wert der gesamten potentiellen Energie ergibt sich aus der Summation der Eigenwerte aller dieser Operatoren.

Ebenfalls nach SCHULTEN<sup>22</sup> wurden für die Kernkonstanten  $a$  und  $\beta$  die Werte:

$$a^{-1} = 3 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2, \quad 1/\sqrt{\beta} = 1.9 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (38)$$

eingesetzt.

Die dimensionslose Konstante  $\nu = a/\beta$ , die in der Berechnung der Energiematrizenintegrale verwendet wird, ist also

$$\nu = a/\beta = 1.2. \quad (39)$$

## V. Hochangeregte Zustände des Kernes $O_{16}$

Der  $O_{16}$ -Kern, eine 16-Teilchen-Struktur, stellt ein wichtiges Problem für jede Theorie von Kern-

modellen dar. In der vorliegenden Untersuchung werden die hochangeregten Zustände mit Hilfe der Annahme gedeutet, daß eines oder mehrere der den  $O_{16}$ -Kern aufbauenden Teilchen in eine der äußeren Bahnen springt (in der Sprache der älteren Quantentheorie) und infolgedessen die inneren Schalen nicht mehr völlig besetzt sind. Der Kern geht unter diesen Umständen in einen hochangeregten Zustand über. Die Wechselwirkung besteht dann zwischen Löchern in vorher abgesättigten Schalen und den entsprechenden Teilchen in vorher unbesetzten Schalen.

Wie sich aus dem Modell für die hochangeregten Zustände des  $O_{16}$ -Kernes ergibt, gehen für negative Paritäten eine ungerade Anzahl, für positive eine gerade Anzahl von Kernteilchen aus der 2. Schale in die 3. Schale über. Da die Anregungsenergie um so größer wird, je größer die Zahl der Übergänge ist, wird die einfache und naheliegende Annahme gemacht, daß die hochangeregten Zustände negativer Parität den Zuständen entsprechen, bei denen nur ein Teilchen von der 2. in die 3. Schale übergegangen ist und für positive Paritäten 2 Teilchen in die 3. Schale gehoben sind. Die Behandlung der einzigen interessanten Zustände positiver Parität  $J = 0^+, 2^+, 4^+$  erfordert eine umfangreiche Rechenarbeit<sup>38</sup>. Daher wurde das Problem auf einige Fälle negativer Parität beschränkt, die bei einer geringeren Zahl von technischen Berechnungen ebensolche Klarheit über das vorliegende Modell und seine Anwendung auf Energien hochangeregter Zustände verschaffen können, wie die positiven Paritäten. Es ist auch zu betonen, daß die Berechnung der Zustände negativer Parität für die Zwecke dieser Arbeit insofern günstiger ist, als der hochangeregte  $\beta$ -Übergang  $N_{16}(\beta^-)O_{16}$  für solche Zustände auftritt.

Das Energieschema (Tab. 3) zeigt nun, daß der hochangeregte Zustand  $J = 3^-$  bezüglich der Spin-bahnenergie am stärksten vorherrscht [Gl.(1)]. Das steht in Übereinstimmung mit dem unten gezeigten experimentellen Energiediagramm<sup>13</sup>.

<sup>38</sup> Zum Beispiel enthalten die Zustandsfunktionen für  $J = 0^+$  und  $2^+$  allein in der nullten Näherung je ca. 30 Determinantenfunktionen, deren Koeffizienten sich anscheinend nicht alle durch Anwendung von  $J^+$  und  $T^+$  und der Normierungsbedingung berechnen lassen. Darüber hinaus erfordert die Berechnung der Energie die Auswertung von  $30 \times 30 = 900$  Determinantenwechselwirkungselementen.

Liefert jede solche Wechselwirkung im Mittel 1 Matrixelement, und gibt es insgesamt nur 200 neue Elemente, so wird die Zahl der Energieberechnungen für die 5 verschiedenen Kräfte um 1000 sein. Das ist aber eine sehr mäßige Schätzung, da die Diagonalelemente bei positiven Paritäten viel zahlreicher sind.

$E_{SB}^{**}$	Annäherungen		$J$				
	Ordnungen	Konfiguration	0	1	2	3	4
- 4	0	$i\pi, D_i$	0	0	+	+	-
- 2	I	$i\pi, S_i$	+	+	-	-	-
- 1	II	$iP, D_i$	0	+	+	+	+
+ 1	III	$i\pi, \delta_i$ $iP, \delta_i$	0	+	+	-	-
4	IV	$iP, \delta_i$	+	+	+	+	-

$$** E_{SB} = -\frac{k}{2} \frac{\hbar^2}{(Mc)^2} M \omega^2 \left\{ \frac{l + \frac{1}{2}}{l - l(l + 1)} \right\} \text{ für } J = \begin{cases} l + \frac{1}{2} \\ l - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ nach Gl. (1).}$$

Bedeutung der Zeichen:

0 ... Die Funktion verschwindet.

- ... Die Funktion existiert nicht.

± ... Die Funktion existiert und es ist  $r \neq 0$ .

Tab. 3. Zustands-Annäherungs-Schema für negative Paritäten  
Loch in 2. Schale, Teilchen in 3. Schale (I, II, III).

### Zustandsfunktionen für $O_{16}$ ( $J = 3^-$ ) in 3 Näherungen

#### 1. Zustandsfunktion nullter Ordnung $J = 3^-$ , $T = 0$ (Loch in $\pi$ -, Teilchen in D-Schale)

$$\Phi_{0_{16}}^0 (J_z = J = 3^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\{3\pi, D_1\} - \{4\pi, D_2\}] . \quad (40)$$

#### 2. Zustandsfunktion erster Ordnung $J = 3^-$ , $T = 0$ (Loch in P-, Teilchen in S-Schale)

$$\Phi_{0_{16}}^1 (J_z = J = 3^-) \equiv 0 . \quad (41)$$

Hierbei wurden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} \text{Gr} \equiv & \sum_{i=1}^4 \langle \sigma_i^* \sigma_j^* | V_p | \sigma_i \sigma_j \rangle + \sum_{i=1}^8 \langle P_i^* P_j^* | V_p | P_i P_j \rangle + \sum_{i=1}^4 \langle \pi_i^* \pi_j^* | V_p | \pi_i \pi_j \rangle \\ & + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \langle \sigma_i^* \pi_j^* | V_p | \sigma_i \pi_j \rangle + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^8 \langle \sigma_i^* P_j^* | V_p | \sigma_i P_j \rangle + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^8 \langle \pi_i^* P_j^* | V_p | \pi_i P_j \rangle \end{aligned} \quad (46)$$

= Energie der Grundzustand von  $O_{16}$ .

$$\begin{aligned} \langle O_{16} D - \pi \rangle &= \langle O_{16} D_1 \rangle - \langle O_{16} \pi_3 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^4 \langle \sigma_i^* D_1^* | V_p | \sigma_i D_1 \rangle + \sum_{i=1}^4 \langle \pi_i^* D_1^* | V_p | \pi_i D_1 \rangle + \sum_{i=1}^8 \langle P_i^* D_1^* | V_p | P_i D_1 \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^4 \langle \sigma_i^* \pi_3^* | V_p | \sigma_i \pi_3 \rangle - \sum_{i=1}^4 \langle \pi_i^* \pi_3^* | V_p | \pi_i \pi_3 \rangle - \sum_{i=1}^8 \langle P_i^* \pi_3^* | V_p | P_i \pi_3 \rangle, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\langle \pi_3 D_1 \rangle = \langle \pi_3^* D_1^* | V_p | \pi_3 D_1 \rangle, \quad (48)$$

$$\langle \pi_4 D_1 | D_2 \pi_3 \rangle = \langle \pi_4^* D_1^* | V_p | D_2 \pi_3 \rangle. \quad (49)$$

<sup>39</sup> Das ist angesichts der Tatsache gerechtfertigt, daß ein D-Teilchen viel weiter von den Teilchen der 1. und 2. Schale entfernt ist als diese untereinander. Ferner hat eine Näherungsrechnung gezeigt, daß diese Energie im Ver-

#### 3. Zustandsfunktion zweiter Ordnung $J = 3^-$ , $T = 0$ (Loch in P-, Teilchen in D-Schale)

$$\begin{aligned} \Phi_{0_{16}}^2 (J_z = J = 3^-) &= \frac{\sqrt{5}}{4} [\{5\pi, D_1\} - \{6\pi, D_2\}] \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{4} [\{7\pi, D_3\} - \{8\pi, D_4\}]. \end{aligned} \quad (42)$$

Die totale Zustandsfunktion, die  $O_{16}$  ( $J = 3^-$ ,  $T = 0$ ) darstellt, ist also

$$\Phi = a_0 \Phi^0 + a_2 \Phi^2 \quad (43)$$

mit  $a_0^2 + a_2^2 = 1$  (Normierungsbedingung).

Zur Bestimmung der Koeffizienten wird das Energievierungsverfahren [siehe Gl. (16)] angewendet.

### Die Energie des hochangeregten Zustandes

1. Die potentielle Energie des Zustandes  $\Phi$  wird nun durch

$$\begin{aligned} E_p &= \langle \Phi^* | V_p | \Phi \rangle \\ &= a_0^2 \langle \Phi^0* | V_p | \Phi^0 \rangle + a_2^2 \langle \Phi^2* | V_p | \Phi^2 \rangle \\ &\quad + 2 a_0 a_2 \langle \Phi^0* | V_p | \Phi^2 \rangle \end{aligned} \quad (44)$$

gegeben.  $V_p$  ist hierbei durch Gl. (37) gegeben.

$$\begin{aligned} \langle \Phi^0* | V_p | \Phi^0 \rangle &\equiv \text{Gr} + \langle O_{16}, D - \pi \rangle - \langle \pi_3 D_1 \rangle \\ &\quad + \langle \pi_4 D_1 | D_2 \pi_3 \rangle. \end{aligned} \quad (45)$$

Der Wert der totalen Energie des Zustandes  $\Phi^0$  unter Vernachlässigung der COULOMB-Energie<sup>39</sup> der

gleich zu der COULOMB-Energie der Teilchen in der 1. und 2. Schale vernachlässigbar ist und für die hier erzielte Rechengenauigkeit weggelassen werden kann; daß heißt  $\langle O_{16} | V(\text{COULOMB}) | D_i \rangle$  wird vernachlässigt.

Wechselwirkung der Teilchen in der 2. Schale und eines D-Schalen-Teilchens ist also

$$E(\Phi^0) = E_k + E_c + 4,595 \quad (50)$$

mit

$$E_c(\pi) = +1,6 \text{ MeV} = \langle O_{16}, \pi \rangle_c, \quad (51)$$

$$E(\Phi^0) = E_k + 2,995 \text{ MeV}. \quad (51)$$

(Da nur die Energiedifferenz zum Grundniveau betrachtet wird, muß dieses subtrahiert werden.)

Ebenso wird

$$E(\Phi^2) = E_k + 6,275 \text{ MeV} \quad (52)$$

und

$$E(\Phi^0 \Phi^2) = \langle \Phi^{0*} | V_p | \Phi^2 \rangle = 0,418 \text{ MeV}. \quad (53)$$

Die Energiedifferenz-Determinante des LAGRANGE-Problems [Gl. (15)] ist nun

$$\begin{vmatrix} 2,995 - \lambda & 0,418 \\ 0,418 & 6,275 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (54)$$

Das ergibt die zwei Werte von  $\lambda$ , entsprechend den zwei angeregten Zuständen:

$$\lambda_1 = 2,945 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 6,325. \quad (55)$$

Die Werte von  $a_0$  und  $a_2$  für die  $\lambda$ -Werte sind durch die Gleichungen:

$$(2,995 - \lambda_1) a_0 + 0,418 a_2 = 0, \quad (56)$$

$$(2,995 - \lambda_2) a_0 + 0,418 a_2 = 0$$

gegeben. Es ist

$$\text{für } \lambda_1 = 2,945: \quad a_0 = -0,992, \quad a_2 = 0,119. \quad (58)$$

Mit Berücksichtigung der kinetischen Energie erhält man die Werte für die Energie der hochangeregten Zustände für die 3 Näherungsfunktionen von  $O_{16}$  ( $J = 3^-$ ,  $T = 0$ )

$$E_{O_{16}} (J = 3^-, T = 0) = 6,035 \text{ und } 9,415 \text{ MeV}. \quad (59)$$

Ähnlich für  $J = 2^-$ ,  $T = 1$ ,  $T_z = 0$ .

$$\begin{aligned} \Phi_{2^-}^0 = & \left[ \sqrt{\frac{5}{6}} \{1\pi, D_1\} + \sqrt{\frac{1}{6}} \{3\pi, D_3\} + \sqrt{\frac{5}{6}} \{2\pi, D_2\} \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{1}{6}} \{4\pi, D_4\} \right] \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (60)$$

## VI. Die hochangeregten Zustände der Kerne $N_{16}$ und $F_{16}$

I.  $-N_{16}-$

Der  $N_{16}$ -Kern kann nach der vorliegenden Theorie als hochangeregter Kern angesehen werden, auch

wenn er sich im Grundzustand befindet. Vom Standpunkt des Schalenmodells kann seine Konfiguration durch die Annahme beschrieben werden, daß ein Proton von der 2. Schale in ein entsprechendes Neutron in der 3. Schale übergegangen ist. Mit anderen Worten besteht die Wechselwirkung zwischen einem Protonen-Loch in der 2. Schale und einem Neutron der 3. Schale.

1. Die Zustandsfunktion für die Konfiguration  $J = 2^-$ ,  $T = 1$ ,  $T_z = -1$  in einer Näherung

$$\Phi_{2^-}^0 = \sqrt{\frac{5}{6}} \{1\pi, D_2\} + \sqrt{\frac{1}{6}} \{3\pi, D_4\}. \quad (61)$$

Durch Anwendung der in den früheren Kapiteln gezeigten Methode findet man als Wert für die Energiedifferenz<sup>40</sup> vom Grundzustand  $O_{16}$ :  $E(N_{16}, \text{Grund}) = 10,209 \text{ MeV}$ .

2. Zustandsfunktion von  $N_{16}$ ,  $J = 3^-$ ,  $T = 1$ ,  $T_z = -1$  in 3 Näherungen

$$\begin{aligned} \Phi_{3^-}^0 = & a_0 \{3\pi, D_2\} \\ & + a_2 \left[ \sqrt{\frac{5}{8}} \{5P, D_2\} + \sqrt{\frac{3}{8}} \{7P, D_4\} \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Die Energieniveaus sind:

$E(N_{16}, J = 3^-, T = 1, T_z = -1) = 10,037 \text{ MeV}$  und  $12,123 \text{ MeV}$ . Die Werte von (6,27 und 8,356) geben nach Gl. (56) und (57) die Werte von  $a_0$  und  $a_2$  für die zwei hochangeregten Linien dieser Funktion, und

$$E_{\Phi_{2^-}^0 (J = 2^-, T = 1, T_z = 0)} = 9,532 \text{ MeV}. \quad (63)$$

Für  $J = 3^-$ ,  $T = 1$ ,  $T_z = 0$ .

$$\begin{aligned} \Phi_{3^-}^0 (T = 1, T_z = 0) = & \frac{a_0}{\sqrt{2}} \left[ \{3\pi, D_1\} + \{4\pi, D_2\} \right] \\ & + a_2 \left[ \frac{\sqrt{5}}{4} (\{5P, D_1\} + \{6P, D_2\}) \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{4} (\{7P, D_3\} + \{8P, D_4\}) \right], \end{aligned} \quad (64)$$

$$E_{\Phi_{3^-}^0 (T = 1, T_z = 0)} = 9,36 \text{ und } 11,446 \text{ MeV}. \quad (65)$$

2.  $-F_{16}-$

Der Spiegelkern  $F_{16}$  ist für die Berechnungen der hochangeregten Energien nicht so interessant wie  $O_{16}$  und  $N_{16}$ , da er sehr instabil ist und das experimentelle Diagramm für die Energieniveaus bis jetzt auch noch nicht bekannt ist.

<sup>40</sup> Hier wurde auch die Massendifferenz zwischen einem Neutron und einem Proton berücksichtigt.

Das Kernmodell für die hochangeregten Zustände von  $F_{16}$  ist fast das gleiche wie für  $N_{16}$ , mit dem einzigen Unterschied, daß die Wechselwirkung nun zwischen einem Neutronenloch in der 2. Schale und einem Proton in der 3. Schale herrscht. Ebenso muß zum Vergleich des Wertes für die Energieniveaus von  $F_{16}$  mit dem Grundzustand von  $O_{16}$  die Massenkorrektion auf Grund des Überschusses von einem Proton berücksichtigt werden. Die COULOMB-Energie zwischen dem Proton in der D-Unterschale und den Teilchen der 2. Schale wird wie bei  $N_{16}$  und  $O_{16}$  vernachlässigt.

Die Zustandsfunktionen für  $F_{16}$  haben die folgende Form:

(Neutronen-Loch + Proton)

$$1. F_{16}(J=3^-, T_z=1, T=1) = a_0 \{ {}_4\pi, D_1 \} + a_2 \sqrt{\frac{5}{8}} \{ {}_6P, D_1 \} + \sqrt{\frac{3}{8}} \{ {}_8P, D_3 \} \quad (66)$$

$$2. F_{16}(J=2^-, T_z=1, T=1) = \sqrt{\frac{5}{6}} \{ {}_2\pi, D_1 \} + \sqrt{\frac{1}{6}} \{ {}_4\pi, D_3 \} \quad (67)$$

$a_0$  und  $a_2$  entsprechen  $\lambda$  in  $N_{16}(J=3^-, T=1, T_z=-1)$ .

Die Energieniveaus unter Vernachlässigung von  $\langle O_{16} | V_c | D_i \rangle$  sind:

$$1. E(F_{16}: J=3^-, T_z=1, T=1) = 8,683 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad 10,769 \text{ MeV.} \quad (68)$$

$$2. E(F_{16}: J=2^-, T_z=1, T=1) = 8,855 \text{ MeV.} \quad (69)$$

## VII. $\beta$ -Zerfall einiger mittelleichter Kerne

### 1. Die Theorie des $\beta$ -Zerfalls

Eine systematische Analyse des Phänomens des  $\beta$ -Zerfalls begann mit dem Auftauchen von PAULIS Neutrino-Hypothese. Diese forderte, daß gleichzeitig mit dem  $\beta$ -Teilchen ein ungeladenes Teilchen mit dem Spin  $\frac{1}{2}\hbar^+$  mit kleiner oder gar keiner Masse emittiert wird. FERMI<sup>34</sup> baute diese Vorstellungen aus und errichtete die Grundlage einer phänomenologischen Theorie des  $\beta$ -Zerfalls, indem er in un-

mittelbarer Analogie zu DIRACs Strahlungstheorie eine Wechselwirkung zwischen dem Lepton- und dem Nukleonfeld annahm. Obwohl FERMIS Hypothese bezüglich der Neutrinos wohlgegründet war (CRANE und HALPERN<sup>41</sup>, CRANE<sup>42</sup>), wurde von YUKAWA<sup>43</sup> ein anderer Erklärungsweg vorgeschlagen, wonach der  $\beta$ -Zerfall ein indirekter Prozeß ist, bei dem ein Kernteilchen zunächst ein Meson emittiert, das letztlich zu einem  $\beta$ -Teilchen und einem Neutrino degeneriert. Infolge des Mangels an experimentellen Kenntnissen über die Eigenschaften eines solchen Mesons wurde diese Theorie nicht sehr schnell entwickelt. Andere theoretische Möglichkeiten, die in ihrer Art Ähnlichkeiten mit der FERMISchen aufweisen, wurden von GAMOW-TELLER<sup>44</sup> und KONOPINSKI und UHLENBECK<sup>45</sup> vorgebracht. Da sich die vorliegende Arbeit vor allem mit übererlaubten (oder ersten erlaubten)  $\beta$ -Übergängen einiger mittelschwerer Kerne beschäftigt, ist die theoretische Behandlung in Übereinstimmung mit FERMIS<sup>34</sup> Theorie einer einfachen nichtrelativistischen Näherung des Problems vorgenommen. Die COULOMBSche Wechselwirkung zwischen dem  $\beta$ -Teilchen und dem Tochter-Teilchen wird dabei auch vernachlässigt.

### 2. Auswahlregeln für Umwandlungsoperatoren und log ft-Werte

a) Die allgemeine Natur des Umwandlungsoperators  $V_\beta$  ist noch nicht genau bekannt, jedoch haben FERMI<sup>34</sup> und GAMOW-TELLER<sup>44</sup> zweckmäßige Hypothesen vorgeschlagen.

Der FERMISCHE Operator  $V_\beta^F$ , ein reiner Ladungsspinoperator, ist definiert durch

$$V_\beta^F = \sum_i T(i). \quad (70)$$

Die Anwendung des FERMI-Operators  $T$  verwandelt somit ein Proton in ein Neutron und umgekehrt.

Andererseits ist der GAMOW-TELLERSCHE Operator ein kombinierter Ladungsspin- und Spinvektortoperator<sup>46</sup>

$$\vec{V}_\beta^{GT} = \sum_i T(i) \vec{\sigma}(i). \quad (71)$$

In den vorliegenden Berechnungen soll eine symmetrische Linearkombination des FERMISCHEN und

<sup>41</sup> H. R. CRANE u. J. HALPERN, Phys. Rev. **53**, 789 [1938].  
<sup>42</sup> H. R. CRANE, Rev. Mod. Phys. **20**, 278 [1948].  
<sup>43</sup> H. YUKAWA, Proc. Math.-Phys. Soc. (Japan) **17**, 48 [1935].

<sup>44</sup> G. GAMOW u. E. TELLER, Phys. Rev. **49**, 895 [1936].

<sup>45</sup> E. J. KONOPINSKI u. G. E. UHLENBECK, Phys. Rev. **48**, 7 [1935].

<sup>46</sup> Möglichkeiten von höheren Spinwerten der Form wurden von KUSAKA<sup>47</sup> untersucht, es wurde aber gefunden, daß sie mit dem Spektrum der  $\beta$ -Strahlen unvereinbar sind.

<sup>47</sup> S. KUSAKA, Phys. Rev. **60**, 61 [1941].

GAMOW-TELLERSCHEN Operators angenommen werden, also

$$|H_{\text{if}}|^2 = \lambda_F |H_{\text{if}}^F|^2 + \lambda_{\text{GT}} |H_{\text{if}}^{\text{GT}}|^2 \quad (72)$$

mit  $\lambda_F = \lambda_{\text{GT}} = 1$ . (73)

β) Was die für den FERMISCHEN bzw. GAMOW-TELLERSCHEN Operator gültigen Auswahlregeln (für erlaubte Übergänge) betrifft, kann durch Anwendung von  $V^F$ , da er – wie bereits betont – ein reiner Ladungsspinoperator ist, keine Änderung in  $J, L, S$

oder in der Parität hervorgerufen werden. Dagegen enthält  $V^{\text{GT}}$  die Spinoperatoren  $\sigma$ , so daß sich  $S$  und folglich auch  $J$  um eine Einheit ändern kann. Nur kann in einem speziellen Fall für GAMOW-TELLER-Übergänge nicht sowohl Anfangs- als auch Endzustand zu  $J=0$  gehören. Nach der WIGNERSCHEN<sup>48</sup> Näherung kann das so formuliert werden, daß alle Übergänge zwischen Zuständen verschiedener Supermultiplette verboten sind.

Die Auswahlregeln für  $V^F$  und  $V^{\text{GT}}$  können daher folgendermaßen zusammengefaßt werden:

	$\Delta J$	$\Delta J_z$	$\Delta L$	$\Delta L_z$	$\Delta s$	$\Delta s_z$	$\Delta T$	Änderung der Parität
$V^F$	0	0	0	0	0	0	$\pm 1$	keine
$V^{\text{GT}}$	$0 \pm 1$ ( $0 \rightarrow 0$ ist verboten)	$0 \pm 1$	0	0	$0 \pm 1$	$0 \pm 1$	$\pm 1$	keine

Tab. 4.

### γ) $\log ft$ -Werte

Der Ausdruck für die Lebensdauer  $t$  (oder besser der Reziproken der Lebensdauer, d. h. der Gesamtübergangswahrscheinlichkeit) der  $\beta$ -Emission in den Übergangsmatrizen  $H_{\text{if}}^{\beta}$  kann durch Integration über die Energieverteilungskurve gefunden werden und lautet:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_0} |H_{\text{if}}^{\beta}|^2 \cdot f; \quad (74)$$

$t_0$  ist hierbei eine universelle Konstante von der Größe<sup>49</sup> zu  $10^{3.73}$  sec und  $f$  ist das Energieverteilungsintegral.

### 3. Der hochangeregte $\beta$ -Zerfall $\text{N}_{16}(\beta^-)\text{O}_{16}$

Der  $\beta$ -Zerfall  $\text{N}_{16}(\beta^-)\text{O}_{16}$  spielt für die Erweiterung des Einteilchenmodells auf die hochangeregten Zustände der 16-Teilchen-Kerne eine wichtige Rolle, und zwar besonders deshalb, weil dieser Übergang einen Grenzwert für erlaubte Übergänge darstellt. Sein  $\log ft$ -Wert von 4,5 ist sehr nahe dem niedrigsten verbotenen Wert von 4,8.

Da dieser Übergang zu einem hochangeregten Zustand von  $\text{O}_{16}$  führt, wurden die zur Untersuchung der Anregungsenergien von  $\text{N}_{16}$  und  $\text{O}_{16}$  aufgestellten Funktionen zu Hilfe genommen.

### α) Experimentelle Ergebnisse<sup>13, 15</sup>: $\text{N}_{16}(\beta^-)\text{O}_{16}$

Zustand		$J$	$J_z$	$T_z$	Parität	$\log ft$
Anfangszustand $\text{N}_{16}$	Grund	2	2	-2	- ve.	
Endzustand $\text{O}_{16}$	Angeregt	3	3,2,1	0	- ve.	= 4,5

Tab. 5.

<sup>48</sup> E. P. WIGNER, Phys. Rev. 56, 519 [1939].

<sup>49</sup> Der Wert wird aus dem Zerfall eines Neutrons bestimmt.

β) *Übergangsschema*: (Auswahlmöglichkeiten – Auswahlregeln, Tab. 4)

$$J_z = 2 \left\{ \begin{array}{ll} \text{F, GT} \xrightarrow{\parallel} & \rightarrow J_z = 0 \\ \text{F} \xrightarrow{\parallel}, \text{ GT} \rightarrow & \rightarrow J_z = 1 \\ \text{F} \xrightarrow{\parallel}, \text{ GT} \rightarrow & \rightarrow J_z = 2 \\ \text{F} \xrightarrow{\parallel}, \text{ GT} \rightarrow & \rightarrow J_z = 3 \end{array} \right.$$

$N_{16} \ (J = 2^-) \quad O_{16} \ (J = 3^-)$

(Die horizontalen Linien werden nicht in der Bedeutung von Energielinien gebraucht. Pfeile zeigen die Übergangsmöglichkeiten an. Das Symbol  $\rightarrow$  be-

deutet im Sinne der Auswahlregeln zulässige oder erlaubte Übergänge, während  $\xrightarrow{\parallel}$  verbotene Übergänge darstellt. Da negative  $J_z$  ohne Bedeutung sind, sind sie nicht eingezzeichnet.)

γ) *Erforderliche Zustandsfunktionen*

Die Funktion für  $N_{16}$  ist [Gl. (61)]:  $J = 2^-$ ;  $J_z = 2$ ;  $T = 1$ ;  $T_z = -1$ .

$$\Phi_{N_{16}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \{_1\pi, D_2\} + \sqrt{\frac{1}{6}} \{_3\pi, D_4\}. \quad (75)$$

Die Zustandsfunktionen für  $O_{16}$  ( $J = 3^-$ ,  $T = 0$ ) für 3 Näherungen ist:

$$\Phi_{O_{16}} (J = 3^-, J_z = 3) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2}} [\{_3\pi, D_1\} - \{_4\pi, D_2\}] + a_2 \left[ \frac{\sqrt{5}}{4} (\{_5P, D_1\} - \{_6P, D_2\}) + \frac{\sqrt{3}}{4} (\{_7P, D_3\} - \{_8P, D_4\}) \right] \quad (76)$$

mit  $a_0 = -0,992$ ;  $a_2 = 0,119$ , für den niedrigsten hochangeregten Zustand von  $3^-$  [Gl. (58)].

Die Zustände für niedrigere Werte von  $J_z$  erhält man leicht durch sukzessive Anwendung von  $J^-$

$$\begin{aligned} \Phi_{O_{16}} (J = 3^-, J_z = 2) &= a_0 \frac{1}{2\sqrt{3}} [\{_2\pi, D_2\} - \{_1\pi, D_1\} + \sqrt{5} (\{_3\pi, D_3\} - \{_4\pi, D_4\})] \\ &+ \frac{a_2}{2\sqrt{39}} [\sqrt{5} (2(\{_4P, D_2\} - \{_3P, D_1\}) + \sqrt{5} (\{_5P, D_3\} - \{_6P, D_4\})) \\ &+ \sqrt{3} ((\{_6P, D_4\} - \{_5P, D_3\}) + 2\sqrt{2} (\{_7P, D_5\} - \{_8P, D_6\}))] \end{aligned} \quad (77)$$

Ebenso ergibt die Anwendung von  $J^-$  auf  $\Phi_{O_{16}} (J = 3^-, J_z = 2)$

$$\begin{aligned} \Phi_{O_{16}} (J = 3^-, J_z = 1) &= a_0 \left[ -\frac{1}{3} \{_1\pi, D_3\} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \{_3\pi, D_5\} + \frac{1}{3} \{_2\pi, D_4\} + \dots \right] \\ &+ a_2 \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{11}} \left[ -\frac{\sqrt{15}}{2} \{_2P, D_2\} + \frac{47}{2} \{_4P, D_4\} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (78)$$

#### 4. Übergangsmatrixelemente $H_{if}^\beta$

Nach den Auswahlregeln können nur GAMOW-TELLER-Elemente existieren. Die Auflösung der Elemente für den Gesamtübergang ergibt:

$$|H_{if}^\beta|^2 = 0,190. \quad (79)$$

Daher ist

$$\log ft = 3,73 - \log 0,190 = 4,45. \quad (80)$$

Berücksichtigen wir, daß für  $N_{16}$  nur eine Näherung verwendet wurde, und daß die Natur dieses Übergangs verhältnismäßig kompliziert ist, so kann dieser Wert als ausreichend angesehen werden, um eine Vorstellung von der Genauigkeit des ganzen Modells zu geben.

Ebenso wurden einige andere  $\beta$ -Übergänge berechnet. Die Ergebnisse sind in Tab. 6 zusammengefaßt.

Die Analyse der Ergebnisse der  $\beta$ -Zerfall-Berechnungen führt letztlich zu dem Schluß, daß die Konfigurationsfunktionen mindestens tolerierbare Näherungsgrade darstellen. Dabei ist zu beachten, daß aus Gründen der Einfachheit im allgemeinen nur Näherungen nullter Ordnung verwendet wurden und, wie sich im Falle der Übergänge von hochangeregten Zuständen des  $O_{16}$  zeigt, kann mit Einschluß höherer Näherungsordnungen auch die prozentuale Abweichung (die bisher ca. 10% war) weiter verringert werden.

Auf alle Fälle bestätigen diese  $\beta$ -Zerfall-Berechnungen die grundsätzlich korrekte Natur der M-J-Kopplung, die die Grundlage des vorliegenden Kernmodells war und als sehr rohe Abschätzung für die Berechnung der hochangeregten Zustände von  $O_{16}$  etc. ist a priori eine Genauigkeit bis auf ca. 10% zu erwarten. Es ist vielleicht zu erwähnen, daß sich

auch die Untersuchungen von KONOPINSKI und LANGER<sup>50</sup> über verbotene Übergänge auf die M-J-Kopplung stützen. Dieser Punkt wurde ziemlich ausführlich von FEENBERG und HAMMACK<sup>6</sup>, MOSKOWSKI und MAYER<sup>51</sup> sowie NORDHEIM<sup>52</sup> diskutiert. Hierbei wurde die grundsätzlich korrekte Natur der Kopplung bestätigt, obwohl die Kern-Wellenfunktionen nach TRIGG<sup>53</sup> zusätzlich zu den M-J-Einteilchenfunktionen weitere wichtige Glieder enthalten.

### VIII. Zusammenfassung

Die in den früheren Abschnitten bei der Berechnung der Energien der hochangeregten Zustände von  $O_{16}$ ,  $N_{16}$  und  $F_{16}$  und des  $\beta$ -Zerfalls einiger mittel leichter Kerne erhaltenen Resultate können nun wie folgt zusammengefaßt werden:

### 1. Energien hochangeregter Zustände von $O_{16}$ , $N_{16}$ und $F_{16}$ (negative Paritäten)

Wie aus dem Diagramm unten zu ersehen ist, stimmen die für  $O_{16}$  berechneten Energieniveaus mit den experimentellen recht gut überein. Bezuglich der theoretischen Anomalie, daß für  $N_{16}$  die Linie  $J = 3^-$  etwas niedriger liegt als das Grundniveau, ist zu sagen, daß für die Berechnungen eine Genauigkeit von mehr als 5% nicht zu erwarten ist. Außerdem beträgt die Differenz zwischen dem Grundniveau (10,3 MeV) und dem nächsthöheren Zustand nur 0,2 MeV. Die Linie bei 10,5 MeV kann der für  $J = 3^-$  wohl entsprechen, wenn man die Nähe der beiden Zustände in Rechnung zieht. Da  $F_{16}$  sehr instabil ist, ist kein Vergleich der berechneten Werte mit experimentellen möglich.

Zerfall	Konfiguration	$\log ft$ experimentell	$\log ft$ berechnet	Prozentuale Abweichung $\log ft$ %
$F_{17} (\beta^+) O_{17}$	$1 D_p, 1 D_N$	3,37	3,39	+ 0,6
$F_{18} (\beta^+) O_{18}$	$1 D_p + 1 D_N, 2 D_N$	3,62	3,726	+ 2,8
$O_{15} (\beta^+) N_{15}$	$-1 \pi_N, -1 \pi_p$	3,57	3,605	+ 1
$N_{16} (\beta^-) O_{16}$	$-1 \pi_p + 1 D_N, -1 \pi_N + 1 D_N$	4,5	4,45	- 1,1

$1 D_p = 1$  Proton in der D Schale,  
 $1 D_N = 1$  Neutron in der D Schale  
 $-1 \pi_p = 1$  Proton fehlt in der  $\pi$  Schale.

Tab. 6.

### 2. $\beta$ -Zerfall

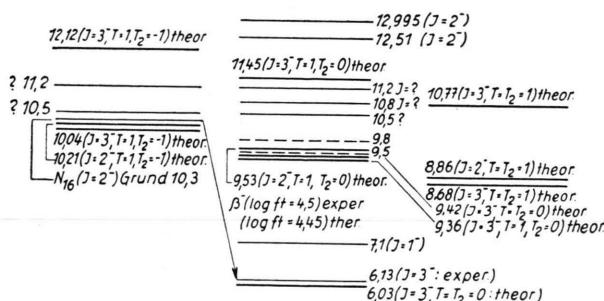


Abb. 1. Energieniveaus der hochangeregten Zustände von  $O_{16}$ ,  $N_{16}$  und  $F_{16}$ , negative Paritäten. Experimentelle Niveaus nach LAURITSEN und AJZENBERG<sup>18</sup>. Stark ausgezogene Linien stellen berechnete Niveaus dar. — — experimentell fraglich. ?  $J$ -Wert nicht bekannt. Die Zahlen geben die Energiedifferenz zum Grundniveau von  $O_{16}$  in MeV an.

<sup>50</sup> E. J. KONOPINSKI u. A. LANGER, Ann. Rev. Nucl. Sci. **2**, 261 [1953].

<sup>51</sup> M. MOSKOWSKI u. M. G. MAYER, Rev. Mod. Phys. **23**, 315 [1951].

### IX. Schlußbemerkungen

Bei Betrachtung der in den vorhergehenden Abschnitten erhaltenen Resultaten bezüglich der hochangeregten Zustandsenergien und des  $\beta$ -Zerfalls kann man im allgemeinen feststellen, daß mit dem vorliegenden Kernmodell die Erklärung solcher Phänomene im Bereich der mittel leichten Kerne (d. h. nukleare Wellenfunktionen der 3. Schale) bis zu einem hinreichenden Ausmaß gelingt. Quantitativ kann freilich eine Genauigkeit von mehr als 10% kaum erwartet werden, da, abgesehen von den Näherungen, mit denen die Rechnungen ausgeführt wurden, die Natur der Austauschkräfte noch nicht ausreichend bekannt ist. Auf jeden Fall kann der Schluß gezogen werden, daß die M-J-Kopplung in den wesentlichen Grundzügen zumindest für die An-

<sup>52</sup> L. W. NORDHEIM, Rev. Mod. Phys. **23**, 322 [1951].

<sup>53</sup> G. L. TRIGG, Phys. Rev. **86**, 506 [1952].

fangsglieder der 3-Schalenkerne, d. h.  $O_{16}$ ,  $N_{16}$  usw. eine befriedigend genaue Näherung liefert. Das gleiche kann auch über die erlaubten  $\beta$ -Übergänge gesagt werden, obwohl hier zu erwähnen ist, daß das Endresultat infolge der starken Abhängigkeit der  $ft$ -Werte von den Übergangsmatrixelementen sehr empfindlich gegenüber kleinen Veränderungen der Zustandsfunktionen ist, so daß Genauigkeiten von ungefähr 5% in den  $ft$ -Werten (d. h. 0,5% in den  $\log ft$ -Werten) nur bei Berücksichtigung höherer Näherungsfunktionen zu erwarten sind.

In der Zwischenzeit zeigten theoretische Berechnungen<sup>54, 55</sup> für einige Kerne der Massenzahlen 17, 18 und 19 ebenfalls die Anwendbarkeit des M-J-Kopplungsschemas in diesem Bereich. Außerdem wurden weitere experimentelle Ergebnisse über die Energien und Übergänge in den hochangeregten Zuständen der 3-Schalenkerne verfügbar (ENDT und KLUYVER<sup>14</sup>). Vielleicht wird die Untersuchung eini-

ger der besser bekannten Kerne in diesem Bereich mehr Licht auf die Natur der Austauschkräfte werfen und außerdem den Gültigkeitsbereich der M-J-Kopplung erforschen. In Ermangelung besserer Methoden mögen wohl auch die erlaubten  $\beta$ -Übergänge zu dem schon aufgezeigten Ergebnis führen und nähere Kenntnis über die Natur der Übergangsmatrixelemente liefern.

Ich möchte hier Herrn Professor C. F. v. WEIZSÄCKER meine Dankbarkeit dafür ausdrücken, daß er mir die Arbeit am Institut ermöglichte, und ihm für sein Interesse am Fortschritten der Arbeit und für viele aufschlußreiche Diskussionen danken. Ebenso gilt mein bester Dank Herrn Dr. SCHULTEN für seine Freundlichkeit, mir viele wesentliche Einzelheiten seiner Theorie<sup>22, 23</sup> auseinandergesetzt zu haben, sowie für weitere wertvolle Anregungen.

<sup>54</sup> M. G. REDLICH, Phys. Rev. **99**, 1421 u. 1427 [1955].

<sup>55</sup> J. P. ELLIOT u. B. H. FLOWERS, Proc. Roy. Soc., Lond. **1179**, 536 [1955].

## Bemerkungen über die Kernstreuung von $K^+$ -Mesonen

Von N. N. BISWAS, M. CECCARELLI und N. SCHMITZ

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforsch. **12 a**, 693—698 [1957]; eingegangen am 16. Juli 1957)

Es wird eine Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse über  $K^+$ -Proton-Streuung und inelastische  $K^+$ -Kern-Streuung in KerneulSIONen gegeben. Bei der Behandlung der inelastischen Streuung mit dem FERMI-Gas-Modell unabhängiger Nukleonen wurde die Reflexion und Brechung am Kernrand und das Auftreten von mehreren K-Nukleon-Stößen im Kern berücksichtigt. Während das „Unabhängige-Teilchen-Modell“ bei hohen Energien eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten liefert, kann es bei niedrigen Energien nicht mehr angewandt werden.

In dieser Arbeit sollen weitere experimentelle Ergebnisse über die Kernstreuung von  $K^+$ -Mesonen mitgeteilt und einige Schlüsse gezogen werden aus den gesamten bisher verfügbaren Daten über dieses Gebiet.

### 1. Das $K^+$ -Kern-Potential

Alle neuen Daten sprechen übereinstimmend dafür, daß  $K^+$ -Mesonen an der Kernoberfläche eine ab-

stoßende Kraft erfahren. Dieses Ergebnis wurde gewonnen sowohl aus der Behandlung der elastischen Streuung mit dem optischen Kernmodell<sup>1—4</sup> als auch aus der Untersuchung der Energieverlustverteilung bei inelastischer Streuung<sup>5—10</sup>.

Der Wert des entsprechenden Potentials ist wahrscheinlich  $15 \div 20$  MeV. Bisher sind keine Anzeichen dafür vorhanden, daß das Potential sich mit der Energie ändert.

<sup>1</sup> G. COSTA u. G. PATERGNANI, Nuovo Cim. **5**, 448 [1957].

<sup>2</sup> D. F. DAVIS, Phys. Rev. **106**, 816 [1957].

<sup>3</sup> N. SCHMITZ, im Druck.

<sup>4</sup> G. IGO, D. G. RAVENHALL u. P. TIEMANN, berichtet auf der 7. Rochester-Konferenz 1957.

<sup>5</sup> N. N. BISWAS, L. CECCARELLI-FABBRECHESI, M. CECCARELLI, K. GOTTSSTEIN, N. C. VARSHNEYA u. P. WALOSCHEK, Nuovo Cim. **5**, 123 [1957].

<sup>6</sup> G. COCCONI, G. PUPPI, G. QUARENIG u. A. STANGHELLINI, Nuovo Cim. **5**, 172 [1957].

<sup>7</sup> M. BALDO-CEOGLI, M. CRESTI, N. DALLAPORTA, M. GRILLI, L. GUERRIERO, M. MERLIN, G. A. SALANDIN u. G. ZAGO, Nuovo Cim. **5**, 402 [1957].

<sup>8</sup> B. BHOWMIK, D. EVANS, S. NILSSON, D. J. PROWSE, F. ANDERSON, D. KEEFE, A. KERNAN u. J. LOSTY, im Druck.

<sup>9</sup> P. MITTELSTAEDT, Nuovo Cim. **5**, 1480 [1957].

<sup>10</sup> J. E. LANNUTI, W. CHUPP, G. GOLDHABER, S. GOLDHABER, G. PUPPI u. G. QUARENIG, berichtet auf der 7. Rochester-Konferenz 1957.